

Unidad 7

Ecuaciones Diferenciales

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

1

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Una **Ecuación Diferencial** es aquella ecuación que contiene diferenciales o derivadas de una o más funciones.

Una **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)** es aquella ecuación diferencial que contiene derivadas de una o más funciones con respecto a una sola variable independiente.

Las ecuaciones diferenciales permiten modelar:

- procesos dinámicos como: vaciado de recipientes, reactores químicos, movimientos amortiguados, desarrollos poblacionales;
- y situaciones estáticas como: deflexión de vigas y problemas geométricos.

A veces no hay una solución analítica, por lo que se necesitan aproximaciones numéricas.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

2

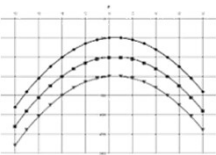
Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Solución numérica de problemas de valor inicial (PVI)

Dada una ecuación diferencial  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  mediante técnicas de cálculo de primitivas se puede obtener la función  $y(t) = y + C$ .

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dt} = 2t - 1, \quad y = t^2 - t + C$$



Los métodos numéricos permitirán obtener valores aproximados  $Y_t$  de la solución  $\phi(t)$  en puntos  $t$  igualmente espaciados.

$$Y_t \approx y(t) = \phi(t)$$

La curva elegida de la familia  $y + C$  se establece a partir del valor de la función  $y$  en el **valor inicial** de la variable independiente ( $y(t_0)$ ).

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

3

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Método de Euler o de la recta tangente

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_m$$

$m + 1$  cantidad de puntos a considerar

Se conocen:  $t_0, Y_0 = \phi(t_0)$  y  $Y'_0 = \phi'(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, Y_0)$ .

Se obtiene un valor aproximado  $Y_1$  de  $\phi(t_1)$  moviéndose a lo largo de una recta tangente desde  $t_0$  hasta  $t_1$ .

$$\phi'(t_0) = \frac{Y_1 - Y_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow Y_1 = Y_0 + (t_1 - t_0)\phi'(t_0) = Y_0 + (t_1 - t_0)f(t_0, Y_0)$$

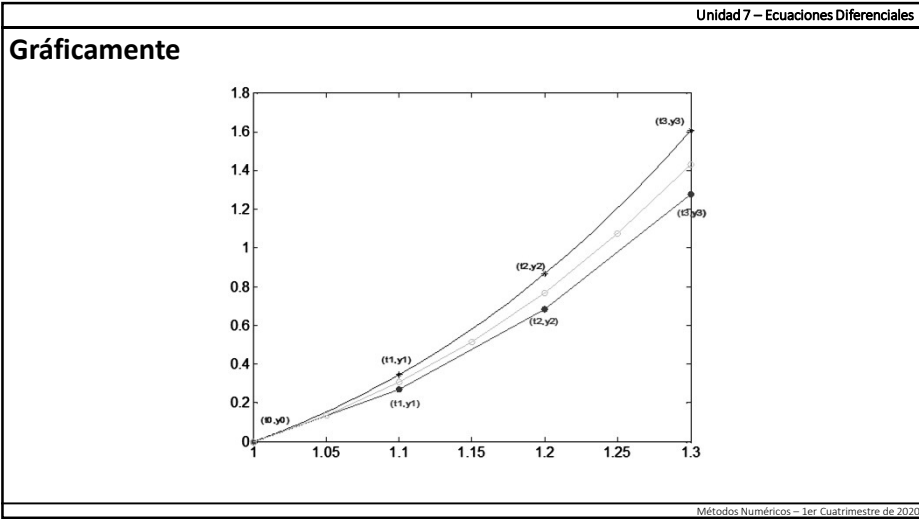
$$Y'_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow Y_2 = Y_1 + (t_2 - t_1)Y'_1 = Y_1 + (t_2 - t_1)f(t_1, Y_1)$$

En general, si  $h = t_{k+1} - t_k$  entonces:

$$Y_{k+1} = Y_k + h f(t_k, Y_k)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

4



5

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y + t^2e^t = f(t,y) \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2 \quad h = 0.1$$

Como  $h = 0.1$  entonces:  $t_0 = 1, t_1 = 1.1, t_2 = 1.2, \dots$   
La solución exacta es:  $y(t) = t^2(e^t - e)$ .  
Por lo tanto:  $\phi(1.2) = (1.2)^2(e^{1.2} - e) = 0.8666425$

Aplicando el método:

$$Y_0 = \phi(t_0) = \phi(1) = y(1) = 0$$
$$Y_1 = Y_0 + h f(t_0, Y_0) = 0 + 0.1 * f(1,0) = 0.1 * 2.718282 = 0.2718282 \approx \phi(1.1)$$
$$Y_2 = Y_1 + h f(t_1, Y_1) = 0.2718282 + 0.1 * f(1.1, 0.2718282) = 0.6847556 \approx \phi(1.2)$$

Entonces:

$$E_{h=0.1} = \phi(1.2) - Y_2 = 0.8666425 - 0.6847556 = 0.1818869$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

6

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Si  $h = 0.05$  entonces:  $t_0 = 1, t_1 = 1.05, t_2 = 1.1, t_3 = 1.15, t_4 = 1.2$

Aplicando el método se obtiene:

$$Y_0 = \phi(t_0) = \phi(1) = y(1) = 0$$
$$Y_1 = Y_0 + h f(t_0, Y_0) = 0 + 0.05 * f(1,0) = 0.05 * 2.718282 = 0.1359141 \approx \phi(1.05)$$
$$Y_2 = Y_1 + h f(t_1, Y_1) = 0.1359141 + 0.05 * f(1.05, 0.1359141) = 0.3063863 \approx \phi(1.1)$$
$$Y_3 = Y_2 + h f(t_2, Y_2) = 0.3063863 + 0.05 * f(1.1, 0.3063863) = 0.5159917 \approx \phi(1.15)$$
$$Y_4 = Y_3 + h f(t_3, Y_3) = 0.5159917 + 0.05 * f(1.15, 0.5159917) = 0.769696 \approx \phi(1.2)$$

Entonces:

$$E_{h=0.05} = \phi(1.2) - Y_4 = 0.8666425 - 0.769696 = 0.0969466$$

Como:

$$E_{h=0.1} = \phi(1.2) - Y_2 = 0.8666425 - 0.6847556 = 0.1818869$$

vemos que el error se reduce a la mitad usando  $h = 0.05$ .

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

7

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Error en la fórmula de Euler

Otra forma de deducir la fórmula del método de Euler para encontrar una aproximación de la solución  $y(t)$  del PVI con solución única es usando el desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto  $t_k$ :

$$\phi(t_k + h) = \phi(t_k) + h \frac{\phi'(t_k)}{f(t_k, \phi(t_k))} + \frac{h^2}{2!} \phi''(t_k) + \dots + \frac{h^n}{n!} \phi^{(n)}(t_k) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \phi^{(n+1)}(\xi_k)$$

donde:  $t_k \leq \xi_k \leq t_{k+1}$ . **Fórmula de Euler**

Error local:  $e_{k+1} = O(h^2)$

Error acumulado:

$$E_T = \sum_{k=0}^{m-1} e_{k+1} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \phi''(\xi_k) = \frac{h^2}{2} m \phi''(\xi_k) = \frac{h}{2} \frac{T-t_0}{m} m \phi''(\xi_k) = h \left( \frac{T-t_0}{2} \phi''(\xi_k) \right) = Ch = O(h)$$

Si  $h$  se reduce a la mitad, el error se reducirá a la mitad.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

8

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Método de Euler mejorado o Método Heun

Método de Euler:  $Y_{k+1} = Y_k + h f(t_k, Y_k)$

Aproximando por la media aritmética de sus valores en los extremos del intervalo:

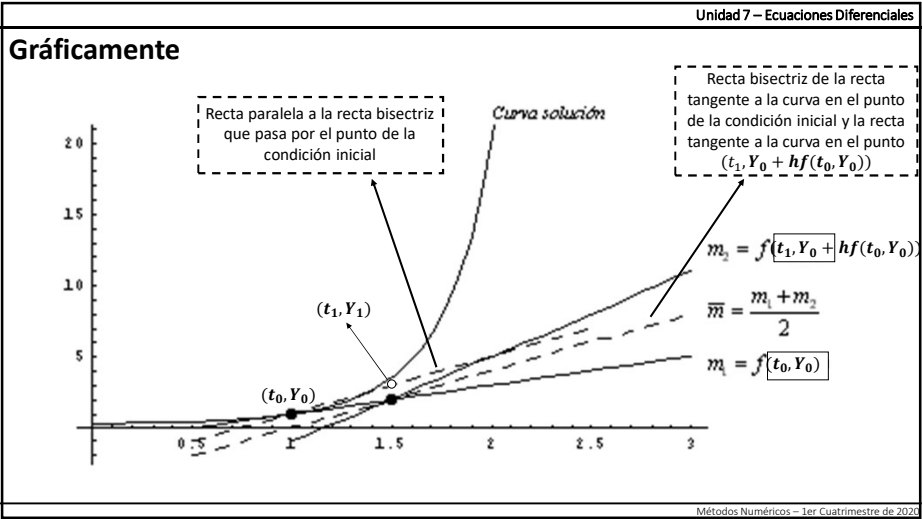
$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, Y_k) + f(t_{k+1}, Y_{k+1})] \quad \text{No se conoce}$$

Como la incógnita  $Y_{k+1}$  aparece como uno de los argumentos en el segundo miembro de la ecuación (en este caso el **método** se dice **implícito**), se reemplaza  $Y_{k+1}$  por el valor que se obtuvo usando la fórmula de Euler sencilla (el **método** se convierte en **explícito**), obteniendo:

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, Y_k) + f(t_{k+1}, Y_k + hf(t_k, Y_k))] \quad \text{Por Euler}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

9



10

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Error en el método Heun

Otra forma de deducir la fórmula de Heun. Para obtener  $y(t)$  podemos integrar  $y'(t)$  en  $[t_0, t_1]$ :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} y'(t) dt = y(t_1) - y(t_0) \Rightarrow y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt$$

Aplicando trapecios para calcular la integral, con  $h = t_1 - t_0$ :

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{2} [f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y(t_1))]$$

Entonces:

$$Error = y''(\xi) \frac{h^3}{12} = O(h^3)$$

En  $M$  pasos:

$$E_T = \sum_{k=1}^M y''(\xi) \frac{h^3}{12} \approx \frac{b-a}{12} y''(\xi) h^2 = O(h^2)$$

**Precisión:** En el extremo final del intervalo  $E(y(b), h) \approx Ch^2$ . Si se toma la mitad del paso  $E(y(b), \frac{h}{2}) \approx C \frac{h^2}{4}$ . Por lo tanto, si se reduce  $h$  a la mitad se espera que el error se reduzca a la cuarta parte.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

11

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} y + t^2 e^t, & 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0, & h = 0.1 \end{cases}$$

$Y_0 = \phi(t_0) = \phi(1) = 0$

$$\begin{cases} Y_1' = Y_0 + hf(t_0, Y_0) = 0 + .1 * f(1,0) = .1 * 2.718282 = .2718282 \\ Y_1 = Y_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, Y_0) + f(t_1, Y_1')] = 0 + \frac{.1}{2} [f(1,0) + f(1.1, .2718282)] = .3423778 \approx \phi(1.10) \end{cases}$$
$$\begin{cases} Y_2' = Y_1 + hf(t_1, Y_1) = .3423778 + .1 * f(1.1, .3423778) = .7681324 \\ Y_2 = Y_1 + \frac{h}{2} [f(t_1, Y_1) + f(t_2, Y_2')] = .3423778 + \frac{.1}{2} [f(1.1, .3423778) + f(1.2, .7681324)] = .8583146 \approx \phi(1.20) \end{cases}$$

$E_{h=0.1} = \phi(1.20) - Y_2 = .8666425 - .8583146 = .0083279$

Con Euler

$E_{h=0.1} = \phi(1.20) - Y_2 = .8666425 - .6847556 = .1818869$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

12

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Método de la Serie de Taylor

Si  $y = \phi(t)$  es la solución exacta del PVI con solución única y  $\phi(t)$  tiene al menos las tres primeras derivadas continuas en el intervalo de interés, entonces:

$$\phi(t_k + h) = \phi(t_k) + h \phi'(t_k) + \frac{h^2}{2!} \phi''(t_k) + \frac{h^3}{3!} \phi'''(\xi_k)$$

donde:  $t_k \leq \xi_k \leq t_{k+1}$ .

$$\phi''(t_k) = f_t(t_k, \phi(t_k)) + f_y(t_k, \phi(t_k)) \phi'(t_k)$$

Reemplazando  $\phi(t_k)$ ,  $\phi'(t_k)$ ,  $\phi''(t_k)$  por sus valores aproximados  $Y_k$ ,  $Y'_k = f(t_k, Y_k)$  y  $Y''_k = f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, \phi(t_k))f(t_k, Y_k)$  respectivamente:

$$Y_{k+1} = Y_k + h Y'_k + \frac{h^2}{2} Y''_k$$

con error:

$$\frac{1}{6} h^3 \phi'''(\xi_k)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

13

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} y + t^2 e^t, & 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0, & h = 0.1 \end{cases}$$

$Y_0 = y(t_0) = y(1) = 0$

$$Y_{k+1} = Y_k + h Y'_k + \frac{h^2}{2} Y''_k \Rightarrow Y_1 = Y_0 + h Y'_0 + \frac{h^2}{2} Y''_0$$
$$Y'_k = f(t_k, Y_k) = \frac{2}{t_k} Y_k + t_k^2 e^{t_k}$$
$$Y'_0 = f(t_0, Y_0) = \frac{2}{t_0} Y_0 + t_0^2 e^{t_0} = 2.71828$$
$$Y''_k = f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k) = \frac{2}{t_k^2} Y_k + t_k^2 e^{t_k} + 2 t_k e^{t_k} + \frac{2}{t_k} Y'_k$$
$$Y''_0 = \frac{2}{t_0^2} Y_0 + t_0^2 e^{t_0} + 2 t_0 e^{t_0} + \frac{2}{t_0} Y'_0 = 2.71828 + 4.71828 + 2 * 2.71828 = 13.5913$$
$$Y_1 = Y_0 + h Y'_0 + \frac{h^2}{2} Y''_0 = 0 + .1 * 2.71828 + \frac{.1^2}{2} 13.5913 = 0.3397$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

14

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta se fundamenta en el método de la serie de Taylor, buscando la exactitud de este método pero sin tener que calcular derivadas parciales y de orden superior de la función  $y(t)$ .

Existen métodos de Runge-Kutta de diferentes ordenes, el orden lo define el orden de la derivada en el término de la serie de Taylor donde ésta se corte.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

15

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Runge-Kutta de segundo orden

La fórmula de los tres primeros términos de la serie de Taylor es:

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= Y_k + h Y'_k + \frac{h^2}{2} Y''_k \\ &= Y_k + h f(t_k, Y_k) + \frac{h^2}{2} [f_t(t_k, Y_k) + f_y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k)] \\ &= Y_k + \frac{h}{2} f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2} f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2} [f_t(t_k, Y_k) h + f_y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k) h] \\ &= Y_k + \frac{h}{2} f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2} [f(t_k, Y_k) + f_t(t_k, Y_k) h + f_y(t_k, Y_k) f(t_k, Y_k) h] \end{aligned}$$

Por Taylor:

$$f(t_k + h, Y_k + g) \approx f(t_k, Y_k) + f_t(t_k, Y_k) h + f_y(t_k, Y_k) g$$

si  $g = f(t_k, Y_k) h$

Entonces:

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2} f(t_k, Y_k) + \frac{h}{2} [f(t_k + h, Y_k) + f(t_k, Y_k) h]$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

16

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{2} h f(t_k, Y_k) + \frac{1}{2} h [f(t_k + h, Y_k + f(t_k, Y_k) h)]$$

$K_1$  $K_2$  $K_1$

La siguiente fórmula se conoce como la Fórmula general de Runge-Kutta de segundo orden:

$$Y_{k+1} = Y_k + a K_1 + b K_2$$

con:

$$\begin{cases} K_1 = h f(t_k, Y_k) \\ K_2 = h f(t_k + \alpha h, Y_k + \beta K_1) \end{cases}$$

Se deben encontrar los valores  $a$ ,  $b$  y  $\alpha$ ,  $\beta$  tales que la fórmula tenga la exactitud del método de los tres primeros términos de la serie de Taylor sin tener que calcular derivadas de orden superior de la función  $\phi(t)$ .

Para  $a = b = \frac{1}{2}$  y  $\alpha = \beta = 1$  es la fórmula de Heun o Euler mejorado.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

17

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Método de Runge-Kutta de cuarto orden

La fórmula de Runge-Kutta que más se utiliza es equivalente a la fórmula de los cinco primeros términos de la serie de Taylor, o sea un método de Runge-Kutta de orden cuatro:

$$\begin{cases} Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \text{ con } \begin{cases} K_1 = h f(t_k, Y_k) \\ K_2 = h f\left(t_k + \frac{1}{2}h, Y_k + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 = h f\left(t_k + \frac{1}{2}h, Y_k + \frac{1}{2}K_2\right) \\ K_4 = h f(t_k + h, Y_k + K_3) \end{cases} \\ Y_0 = y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Con **error local** de orden  $O(h^5)$  y **error total** de orden  $O(h^4)$ , siempre y cuando la solución tenga las primeras cinco derivadas continuas.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

18

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Gráficamente

El gráfico muestra un sistema de coordenadas con el eje horizontal etiquetado como  $x$  y el eje vertical como  $y$ . Se traza una curva continua etiquetada como "Solución analítica". Se selecciona un punto inicial  $(x_0, y_0)$  y se avanza a un punto  $x_1$ . En  $x_1$ , se calculan las pendientes  $K_1, K_2, K_3$  y  $K_4$  para el método de Runge-Kutta de cuarto orden. La solución numérica se aproxima como  $y_1$ . El error se indica como la distancia vertical entre la solución analítica y la solución numérica en  $x_1$ , etiquetado como "Error" y  $F(x_1)$ . La fórmula para la solución numérica se muestra como  $y_1 = y_0 + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}h$ .

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

19

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y + t^2e^t, & 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0, & h = 0.1 \end{cases}$$

$Y_0 = 0$   
 $Y_1 = Y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t_0, Y_0) = .1f(1,0) = .27182818 \\ K_2 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, Y_0 + \frac{1}{2}K_1\right) = .1f\left(1.05, \frac{.27182818}{2}\right) = .3409444 \\ K_3 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, Y_0 + \frac{1}{2}K_2\right) = .1f\left(1.05, \frac{.3409444}{2}\right) = .3475269 \\ K_4 &= hf(t_0 + h, Y_0 + K_3) = .1f(1.1, .3475269) = .4266908 \end{aligned}$$
$$Y_1 = 0 + \frac{1}{6}(.27182818 + (2)(.3409444) + (2)(.3475269) + .4266908) = .3459103$$
$$Y_2 = .8666217$$
$$\text{Error} = |Y_2 - y(1.2)| = |.8666217 - .8666425| = 2.08 \cdot 10^{-5}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

20

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Cálculo de tamaño del intervalo

**Ejemplo para el método RK4:**

En el extremo final del intervalo  $E(y(b), h) \approx Ch^4$ . Si se toma la mitad del paso  $E(y(b), \frac{h}{2}) \approx C \frac{h^4}{16}$ .

Si se reduce  $h$  a la mitad se espera que el error se reduzca en  $\frac{1}{16}$ .

Se podría estimar un  $h$  adecuado para mantener un error menor que un  $\varepsilon$  dado. El valor  $C$  será dependiente del problema.

Considerando el error local  $E_k = Ch^5$  y que con la mitad de  $h$  se necesitan evaluar 2 puntos para evaluar  $k$ :

$$2E_{\frac{k}{2}} = 2C \frac{h^5}{32} \Rightarrow E_k - 2E_{\frac{k}{2}} = Ch^5 - 2C \frac{h^5}{32} = \frac{15}{16}Ch^5 \Rightarrow C = \frac{16(E_k - 2E_{\frac{k}{2}})}{15h^5}$$
$$\left. \begin{aligned} [y_1]_k &\approx \phi(1) + E_k \\ [y_1]_{\frac{k}{2}} &\approx \phi(1) + E_{k/2} \end{aligned} \right\} E_k - 2E_{\frac{k}{2}} \approx [y_1]_k - [y_1]_{\frac{k}{2}} \Rightarrow C = \frac{16}{15} \frac{[y_1]_k - [y_1]_{\frac{k}{2}}}{h^5}$$

considerando:  $\varepsilon = E_k = Ch^5 \Rightarrow h = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/5}$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

21

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Método R-K-Feldberg

$$s = \left( \frac{\varepsilon h}{2|z_{n+1} - y_{n+1}|} \right)^{1/4}$$

$\varepsilon$  = tolerancia  
 $s$  = paso óptimo

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\ k_4 &= hf\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\ k_5 &= hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\ k_6 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \\ z_{n+1} &= y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12.825}k_2 + \frac{28.561}{56.430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \\ E &= \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \end{aligned}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

22

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Sistemas de EDOs de primer orden

Movimiento vertical de los resortes acoplados

Corrientes en una red eléctrica

Péndulo doble

Modelo predador-presa

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax - Bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -Cy + Dxy \end{aligned}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

23

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Sistemas de EDOs de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x' = f_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= y' = f_2(t, x, y) \\ x(t_0) &= x_0, y(t_0) = y_0 \end{aligned}$$

Se aplica algún método (preferiblemente Runge-Kutta de orden cuatro) a cada una de las ecuaciones del sistema.

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}(K_{1y} + 2K_{2y} + 2K_{3y} + K_{4y}) \text{ con } \begin{cases} K_{1y} = hf_2(t_k, X_k, Y_k) \\ K_{2y} = hf_2\left(t_k + \frac{1}{2}h, X_k + \frac{1}{2}K_{1x}, Y_k + \frac{1}{2}K_{1y}\right) \\ K_{3y} = hf_2\left(t_k + \frac{1}{2}h, X_k + \frac{1}{2}K_{2x}, Y_k + \frac{1}{2}K_{2y}\right) \\ K_{4y} = hf_2(t_k + h, X_k + K_{3x}, Y_k + K_{3y}) \end{cases}$$
$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6} \dots$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

24

Ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + 2y = g(t, x, y) \end{aligned} \quad \begin{cases} x(0) = 6 \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad h=0.02$$

$$f(t, x, y) = x + 2y \qquad g(t, x, y) = 3x + 2y \qquad h=0.02$$

$$\begin{aligned} K_{1f} &= h f(t_0, x_0, y_0) \\ &= 0.02 f(0, 6, 4) = .28 \\ K_{2f} &= h f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{1f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{1g}) \\ &= 0.02 f(0.016, 14, 4.26) = .2932 \\ K_{3f} &= h f(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{2f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{2g}) \\ &= 0.02 f(0.016, 14.66, 4.2694) = .2937 \\ K_{4f} &= h f(t_0 + h, x_0 + K_{3f}, y_0 + K_{3g}) \\ &= 0.02 f(0.02, 6.2937, 4.5396) = .3074 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{1g} &= h g(t_0, x_0, y_0) \\ &= 0.02 g(0, 6, 4) = .52 \\ K_{2g} &= h g(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{1f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{1g}) \\ &= 0.02 g(0.016, 14, 4.26) = .5388 \\ K_{3g} &= h g(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}K_{2f}, y_0 + \frac{1}{2}K_{2g}) \\ &= 0.02 g(0.016, 14.66, 4.2694) = .5395 \\ K_{4g} &= h g(t_0 + h, x_0 + K_{3f}, y_0 + K_{3g}) \\ &= 0.02 g(0.02, 6.2937, 4.5395) = .5592 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(K_{1f} + 2K_{2f} + 2K_{3f} + K_{4f}) = 6 + \frac{1}{6}(.28 + 2(.2932) + 2(.2937) + .3074) = 6.2935 \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(K_{1g} + 2K_{2g} + 2K_{3g} + K_{4g}) = 4 + \frac{1}{6}(.52 + 2(.5388) + 2(.5395) + .5592) = 4.5393 \end{aligned}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

25

EDOs de orden N

Si la ecuación es de orden mayor o igual a 2, se transforma la ecuación en un sistema de EDOs de primer orden.

Ejemplo:

$$\begin{cases} t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln(t) \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad 1 \leq t \leq 1.5 \end{cases}$$

Se transforma el PVI en un sistema de EDOs de primer orden. Se despeja el diferencial de mayor orden. Se reemplazan las funciones por otras equivalentes con el fin de eliminar las diferenciales de orden superior:

$$\begin{cases} y' = g = f_1(t, y, g) \\ g' = y'' = \frac{2}{t}g - \frac{2}{t^2}y + t \ln(t) = f_2(t, y, g) \\ y(1) = 1, \quad g(1) = 0, \quad h = 0.05 \end{cases}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

26

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

$$\begin{aligned} y' &= g = f_1(t, y, g) \\ g' &= \frac{2}{t}g - \frac{2}{t^2}y + t \ln(t) = f_2(t, y, g) \\ y(1) &= 1, \quad g(1) = 0, \quad h = 0.05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{1f_1} &= hf_1(t_0, y_0, g_0) = .05 f_1(1, 1, 0) = .05 (0) = 0 \\ K_{1f_2} &= hf_2(t_0, y_0, g_0) = .05 f_2(1, 1, 0) = .05 \left( \frac{2}{1} 0 - \frac{2}{1^2} 1 + \ln(1) \right) = -.1 \\ K_{2f_1} &= hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{1f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{1f_2}}{2}\right) = .05 f_1(1.025, 1, -.05) = -2.5 \cdot 10^{-3} \\ K_{2f_2} &= hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{1f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{1f_2}}{2}\right) = .05 f_2(1.025, 1, -.05) = -.098793992 \\ K_{3f_1} &= hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{2f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{2f_2}}{2}\right) = .05 f_1(1.025, .99875, -.049396996) = \\ &= -2.4698498 \cdot 10^{-3} \\ K_{3f_2} &= hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_{2f_1}}{2}, g_0 + \frac{K_{2f_2}}{2}\right) = .05 f_2(1.025, .99875, -.049396996) = \\ &= -.0986161855 \end{aligned}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

27

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

$$\begin{aligned} K_{4f_1} &= hf_1(t_0, y_0 + K_{3f_1}, g_0 + K_{3f_2}) \\ &= .05 f_1(1.05, .9975301502, -.0986161855) = -4.930809278 \cdot 10^{-3} \\ K_{4f_2} &= hf_2(t_0, y_0 + K_{3f_1}, g_0 + K_{3f_2}) = .05 f_2(1.05, .9975301502, -.0986161855) \\ &= -.0973094592 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(K_{1f_1} + 2K_{2f_1} + 2K_{3f_1} + K_{4f_1}) = \\ &= 1.0 + \frac{1}{6}(0 + 2(-2.5 \cdot 10^{-3}) + 2(-2.4698498 \cdot 10^{-3}) - 4.930809278 \cdot 10^{-3}) \\ &= .9975215819 \\ &\vdots \\ g_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(K_{1f_2} + 2K_{2f_2} + 2K_{3f_2} + K_{4f_2}) = \\ &= 0 + \frac{1}{6}(-.1 + 2(-.0987793992) + 2(-.0998616185) - .0973094592) \\ &= -.0986883023 \end{aligned}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

28

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Comandos Matlab

[ T, Y, S ] = comando ( 'F', tspan, y0, opciones, p1, p2,... )

Comando:

- Ode45:** Compara resultados de Runge-Kutta de orden 4 y 5.  
Dormand-Prince
- Ode23:** Compara resultados de Runge-Kutta de orden 2 y 3.  
Bogacki and Shampine.
- Ode113:** Multipaso, Adams-Bashforth-Moulton
- Los comandos **Odexxs**, **Odexxt** y **Odexxtb**: Comparan resultados de Runge-Kutta con distintos niveles de tolerancia.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

29

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Comandos Matlab

Parámetros de entrada:

'F': función conteniendo dy/dt, o vector columna de funciones dyi/dt

tspan: vector conteniendo el intervalo de integración [t0, tfinal] ó puntos a evaluar [t0, t1, t2,..., tfinal] ó [t0:h:tfinal].

y0: vector de condiciones iniciales.

opciones: creadas con odeset.

p0, p1, p2, ... : opciones pasadas a la función/es.

Parámetros de salida:

T: vector de puntos t.

Y: matriz solución, cada fila corresponde a cada valor t, cada columna a yi.

S: estadísticas de los cálculos

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

30

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Problemas de contorno o valores de frontera (PVF)

$$\begin{matrix} x'' = f(t, x, x') \text{ para } a \leq t \leq b \\ x(a) = v \quad \wedge \quad x(b) = w \end{matrix}$$

Son EDOs de segundo orden, donde se conocen los valores de la función en los extremos del intervalo.

Ejemplo: Problemas de deflexión de una viga con los extremos sujetos.

Posible solución: Descomponer en un sistema de dos ecuaciones de valor inicial. El problema es que se desconoce la derivada en el valor inicial.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(t, x, y) \end{cases} \text{ falta el valor de } y(a)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

31

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Método del disparo

Si se desconoce el valor inicial, se intenta establecer el valor de la derivada en el punto inicial.

- Estimar un valor inicial para  $x'(a)$  "*ángulo de disparo*". Si se desconoce el problema como para estimarlo, será un valor arbitrario:
$$d1 = x'(a)^{(1)} = y(a)^{(1)}$$
- Calcular  $x(b)^{(1)}$  en el sistema por los métodos clásicos de PVI.
- Corregir el "*ángulo de disparo*":
$$d2 = x'(a)^{(2)} = y(a)^{(2)}$$
- Calcular  $x(b)^{(2)}$ .
- Obtener una mejora  $d = x'(a)^{(3)}$  mediante interpolación lineal de los  $x(b)$  y obtener un nuevo  $x(b)^{(3)}$ . **Método del disparo lineal**
$$d3 = d1 + \frac{x(b) - x(b)^{(1)}}{x(b)^{(2)} - x(b)^{(1)}}(d2 - d1) = x'(a)^{(3)} = y(a)^{(3)}$$
- Repetir hasta encontrar una aproximación adecuada de  $x(b)^{(i)}$  a  $w$ .



Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

32

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo

$$\begin{cases} y''(x) = y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
 para  $0 < x < 1$ ,  $h = 0.1$  entonces:  $\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$

Aplicando **ode45**:

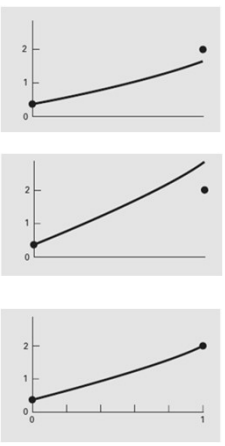
Con  $z(0) = d1 = 1.5$  entonces:  $y(1)^{(1)} = 1.7628$

Con  $z(0) = d2 = 2.5$  entonces:  $y(1)^{(2)} = 2.9380$

Recalculamos el disparo:

$$d3 = d1 + \frac{y(1) - y(1)^{(1)}}{y(1)^{(2)} - y(1)^{(1)}}(d2 - d1) = 1.5 + \frac{2 - 1.7628}{2.9380 - 1.7628}(2.5 - 1.5) = 1.7018$$

Por lo tanto, con  $z(0) = d3 = 1.7018$  entonces:  $y(1)^{(3)} = 2$



Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

33

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

function dydx = ej(x,Y)

dydx = [Y(2); Y(1)];

x: variable independiente

Y: vector de EDOs

Y = [y(x);z(x)]

$y' = z$

$z' = y$

>> [x,y] = ode45 (@ej,[0:0.1:1],[0,1.5]);

>> [x,y] = ode45 (@ej,[0:0.1:1],[0,2.5]);

>> [x,y] = ode45 (@ej,[0:0.1:1],[0,1.7018]);

|        | Y(1)   | Y(2)   |
|--------|--------|--------|
| x      | y      | z      |
| 0      | 0      | 1.5000 |
| 0.1000 | 0.1503 | 1.5075 |
| 0.2000 | 0.3020 | 1.5301 |
| 0.3000 | 0.4568 | 1.5680 |
| 0.4000 | 0.6161 | 1.6216 |
| 0.5000 | 0.7816 | 1.6914 |
| 0.6000 | 0.9550 | 1.7782 |
| 0.7000 | 1.1379 | 1.8828 |
| 0.8000 | 1.3322 | 2.0062 |
| 0.9000 | 1.5398 | 2.1496 |
| 1.0000 | 1.7628 | 2.3146 |

|        | Y(1)   | Y(2)   |
|--------|--------|--------|
| x      | y      | z      |
| 0      | 0      | 2.5000 |
| 0.1000 | 0.2504 | 2.5125 |
| 0.2000 | 0.5033 | 2.5502 |
| 0.3000 | 0.7613 | 2.6133 |
| 0.4000 | 1.0269 | 2.7027 |
| 0.5000 | 1.3027 | 2.8191 |
| 0.6000 | 1.5916 | 2.9637 |
| 0.7000 | 1.8965 | 3.1379 |
| 0.8000 | 2.2203 | 3.3436 |
| 0.9000 | 2.5663 | 3.5827 |
| 1.0000 | 2.9380 | 3.8577 |

|        | Y(1)   | Y(2)   |
|--------|--------|--------|
| x      | y      | z      |
| 0      | 0      | 1.7018 |
| 0.1000 | 0.1705 | 1.7103 |
| 0.2000 | 0.3426 | 1.7359 |
| 0.3000 | 0.5182 | 1.7790 |
| 0.4000 | 0.6990 | 1.8398 |
| 0.5000 | 0.8868 | 1.9190 |
| 0.6000 | 1.0835 | 2.0174 |
| 0.7000 | 1.2910 | 2.1360 |
| 0.8000 | 1.5114 | 2.2760 |
| 0.9000 | 1.7469 | 2.4388 |
| 1.0000 | 2.0000 | 2.6260 |

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

34

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Método de las diferencias finitas

Se reemplazan todas las derivadas de primer orden ( $x'$ ) y de segundo orden ( $x''$ ) por diferencias centralizadas en cada uno de los puntos a calcular:

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1}))}{2h}$$
$$x''(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1}))}{h^2}$$

obteniéndose un sistema de ecuaciones con incógnitas  $x(t_k)$ .

Ejemplo

$$y''(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2}$$

$y(0) = 0$

$y(1) = 2$

para  $0 < x < 1$

$h = 0.1$

$$\frac{y(0.2) - 2y(0.1) + y(0)}{0.1^2} = y(0.1)$$
$$\frac{y(0.3) - 2y(0.2) + y(0.1)}{0.1^2} = y(0.2)$$
$$\vdots$$
$$\frac{y(1) - 2y(0.9) + y(0.8)}{0.1^2} = y(0.9)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2.01 & 1 & & & \\ & 1 & -2.01 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2.01 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(0.1) \\ y(0.2) \\ \vdots \\ y(0.9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix}$$

| x      | y      |
|--------|--------|
| 0      | 0      |
| 0.1000 | 0.1705 |
| 0.2000 | 0.3427 |
| 0.3000 | 0.5183 |
| 0.4000 | 0.6991 |
| 0.5000 | 0.8869 |
| 0.6000 | 1.0836 |
| 0.7000 | 1.2911 |
| 0.8000 | 1.5115 |
| 0.9000 | 1.7470 |
| 1.0000 | 2.0000 |

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

35

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones en derivadas parciales (EDP)

Las ecuaciones en derivadas parciales son ecuaciones diferenciales donde aparecen dos o más variables independientes.

Aplicables en distintos tipos de cálculos técnicos.

Son probablemente las ecuaciones de mayor interés para la física-matemática y sus aplicaciones en ingeniería. Una de las más conocidas y útiles es la famosa **ecuación de Laplace**, que apareció por primera vez en la teoría newtoniana de la atracción gravitacional.

También aparecen en las teorías de elasticidad, sonido, luz, calor, electromagnetismo y del movimiento de fluidos.

Básicamente hay tres tipos de problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden aplicadas en una o más dimensiones:

- Ecuación de calor (o de difusión).
- Ecuación de onda.
- Otros sistemas físicos (Ecuación de Laplace, Ecuación de Poisson, Ecuación de Helmholtz).

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

36

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones en derivadas parciales (EDP)

Para dos variables independientes, tales ecuaciones pueden expresarse en forma general como:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

Si  $B^2 - 4AC < 0$  **ELÍPTICA**: Ecuación de Laplace.

Si  $B^2 - 4AC = 0$  **PARABÓLICA**: Ecuación de calor.

Si  $B^2 - 4AC > 0$  **HIPERBÓLICA**: Ecuación de onda.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

37

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Método de las diferencias finitas

Método de las diferencias finitas centradas para  $x'$ :

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1}))}{2h}$$

Método de las diferencias finitas hacia adelante para  $x'$ :

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{h}$$

Método de las diferencias finitas hacia atrás para  $x'$ :

$$x'(t_j) = \frac{x(t_j) - x(t_{j-1}))}{h}$$

Método de las diferencias finitas para  $x''$ :

$$x''(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1}))}{h^2}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

38

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuación hiperbólica: Ecuación de onda

Como ejemplo de una ecuación hiperbólica consideramos la ecuación de ondas:

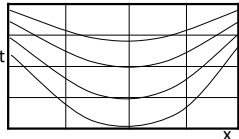
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \equiv \quad u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \quad \text{para } 0 < x < a \wedge 0 < t < b$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \wedge u(a, t) = 0 && \text{para } 0 < t < b \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{para } 0 \leq x \leq a \\ u_t(x, 0) &= g(x) && \text{para } 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

y donde  $c$  es el coeficiente de velocidad de propagación.

La ecuación de ondas modela el desplazamiento  $u$  desde su posición de equilibrio de una cuerda elástica vibrante cuyos extremos, de coordenadas  $x = 0$  y  $x = a$ , están fijos.



Variable de tiempo con una dimensión espacial.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

39

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuación hiperbólica: Ecuación de onda

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$
$$\frac{c^2 k^2}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})$$

Sea  $r = \frac{ck}{h}$ :

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - u_{i,j-1} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n - 1$$

Si el error cometido en una etapa de los cálculos no se amplifica en las etapas posteriores, entonces se dice que el método es **estable**. Para garantizar la estabilidad es necesario que  $r = \frac{ck}{h} \leq 1$ .

Existen otros esquemas, llamados **métodos implícitos**, que son de desarrollo más complejo pero no imponen restricciones sobre  $r$  para que tenga estabilidad.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

40

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuación hiperbólica: Ecuación de onda

Se conocen  $u(x, 0) = f(x)$  y  $u_t(x, 0) = g(x, 0)$ , entonces:

$$u(x_i, 0) = f(x_i)$$
$$u_{i,0} = f_i$$

$$u_t(x, 0) = g(x, 0)$$
$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1}))}{2k} = g(x_i, 0)$$
$$-u(x_i, t_{j-1}) = 2k g(x_i, 0) - u(x_i, t_{j+1})$$
$$-u_{i,j-1} = 2k g_i - u_{i,j+1}$$

Como:

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - u_{i,j-1}$$
$$u_{i,1} = (2 - 2r^2)u_{i,0} + r^2(u_{i-1,0} + u_{i+1,0}) - u_{i,j-1}$$
$$u_{i,1} = (2 - 2r^2)u_{i,0} + r^2(u_{i-1,0} + u_{i+1,0}) - u_{i,1} + 2k g_i$$
$$u_{i,1} = (1 - r^2)f_i + \frac{r^2}{2}(f_{i-1} + f_{i+1}) + k g_i$$

Como  $u_{i,-1}$  no tiene sentido, reemplazamos usando la condición de contorno

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

41

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuación hiperbólica: Ecuación de onda

Por lo tanto, quedan determinadas las siguientes ecuaciones:

$$u_{i,1} = (1 - r^2)f_i + \frac{r^2}{2}(f_{i-1} + f_{i+1}) + k g_i$$

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - u_{i,j-1}$$

para  $i = 2,3, \dots, n - 1$ .

La ecuación (1) se aplica sólo para  $t_1$ . En el resto de los casos ( $t_2, t_3, \dots, t_n$ ) se aplica la ecuación (2).

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

42

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Vibración de una cuerda atada en los extremos.

- Posición inicial de la cuerda:  $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x)$ ,  $0 < x < 1$
- Velocidad inicial:  $u'(x, 0) = 2\pi \text{sen}(2\pi x)$ ,  $0 < x < 1$
- Valor en los extremos:  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$
- $c^2 = 1$ ,  $L = 1$ ,  $0 < t < 0.1$  con  $k = 0.01$ . Con 10 intervalos en el largo de la cuerda,  $h = 0.1$

|           |                           |       |       |       |       |     |        |        |        |        |
|-----------|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-----|--------|--------|--------|--------|
| $i$       | 1                         | 2     | 3     | 4     | 5     | 6   | 7      | 8      | 9      |        |
| $x$       | 0.1                       | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6 | 0.7    | 0.8    | 0.9    |        |
| $f_i$     | $\text{sen}(\pi x)$       | 0.309 | 0.587 | 0.809 | 0.951 | 1   | 0.951  | 0.809  | 0.587  | 0.309  |
| $g_i$     | $2\pi \text{sen}(2\pi x)$ | 3.693 | 5.976 | 5.976 | 3.693 | 0   | -3.693 | -5.976 | -5.976 | -3.693 |
| $u_{i,1}$ |                           | 0.346 | 0.647 | 0.868 | 0.988 | 1   | 0.914  | 0.749  | 0.528  | 0.272  |

$$r = \frac{ck}{h} = 0.1$$
$$2\left(1 - \frac{c^2 k^2}{h^2}\right) = 1.98$$

$$\begin{bmatrix} 1.98 & 0.01 & 0 & \dots & 0 \\ 0.01 & 1.98 & 0.01 & \dots & 0 \\ 0 & 0.01 & 1.98 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0.01 & 1.98 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.346 \\ 0.309 \\ 0.587 \\ \vdots \\ 0.272 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.346 \\ 0.309 \\ 0.587 \\ \vdots \\ 0.272 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3825 \\ 0.7062 \\ 0.9260 \\ \vdots \\ 0.2348 \end{bmatrix}$$

$y_{1,1}$        $y_{1,0}$        $y_{1,2}$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

43

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

|      |   |        |        |        |        |        |        |        |         |         |   |
|------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---|
|      |   | x      |        |        |        |        |        |        |         |         |   |
| t    | 0 | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8     | 0.9     | 1 |
| 0    | 0 | 0.3090 | 0.5878 | 0.8090 | 0.9511 | 1.0000 | 0.9511 | 0.8090 | 0.5878  | 0.3090  | 0 |
| 0.01 | 0 | 0.3458 | 0.6473 | 0.8684 | 0.9875 | 0.9995 | 0.9137 | 0.7489 | 0.5277  | 0.2719  | 0 |
| 0.02 | 0 | 0.3821 | 0.7059 | 0.9267 | 1.0229 | 0.9980 | 0.8755 | 0.6881 | 0.4673  | 0.2347  | 0 |
| 0.03 | 0 | 0.4179 | 0.7636 | 0.9838 | 1.0571 | 0.9956 | 0.8366 | 0.6271 | 0.4068  | 0.1974  | 0 |
| 0.04 | 0 | 0.4529 | 0.8199 | 1.0394 | 1.0899 | 0.9922 | 0.7973 | 0.5659 | 0.3464  | 0.1603  | 0 |
| 0.05 | 0 | 0.4871 | 0.8748 | 1.0934 | 1.1213 | 0.9878 | 0.7576 | 0.5049 | 0.2864  | 0.1234  | 0 |
| 0.06 | 0 | 0.5203 | 0.9281 | 1.1454 | 1.1510 | 0.9824 | 0.7177 | 0.4442 | 0.2269  | 0.0869  | 0 |
| 0.07 | 0 | 0.5523 | 0.9794 | 1.1953 | 1.1790 | 0.9761 | 0.6776 | 0.3841 | 0.1681  | 0.0509  | 0 |
| 0.08 | 0 | 0.5831 | 1.0286 | 1.2429 | 1.2052 | 0.9688 | 0.6377 | 0.3247 | 0.1104  | 0.0156  | 0 |
| 0.09 | 0 | 0.6126 | 1.0755 | 1.2880 | 1.2293 | 0.9606 | 0.5979 | 0.2663 | 0.0538  | -0.0189 | 0 |
| 0.1  | 0 | 0.6405 | 1.1198 | 1.3303 | 1.2513 | 0.9515 | 0.5584 | 0.2091 | -0.0013 | -0.0524 | 0 |

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

44

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

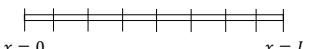
Ecuación Parabólica: Ecuación de calor o difusión

Como ejemplo de una ecuación parabólica consideramos la ecuación de calor unidimensional:

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \wedge 0 \leq t \leq b$$

con la condición inicial:  $u(x,0) = f(x)$  para  $0 \leq x \leq L$   
y con las condiciones de contorno:

$$u(0,t) = g_1(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq b$$
$$u(L,t) = g_2(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq b$$



Se conocen  $t_0, u(x_i, t_0), u(0, t_j)$  y  $u(L, t_j)$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

45

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuación Parabólica: Ecuación de calor o difusión

Método Explícito:

Usando las fórmulas de diferencias finitas y teniendo en cuenta que el tamaño de los rectángulos de la malla es uniforme en cada fila ( $x_{i+1} = x_i + h$ ) y cada columna ( $t_{j+1} = t_j + k$ ), entonces para cada  $i$  y cada  $j$ :

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$
$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{c^2 k}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

Sea  $r = \frac{c^2 k}{h^2}$ :

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

El método es estable si y sólo si  $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ . Es inestable si:  $r = \frac{c^2 k}{h^2} > \frac{1}{2}$ .

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

46

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuación Parabólica: Ecuación de calor o difusión

Método Implícito:

Para garantizar la estabilidad sin condiciones adicionales se propone este método implícito. Usando las fórmulas de diferencias finitas hacia atrás se tiene que:

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$
$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$
$$u_{i,j-1} = u_{i,j} - \frac{c^2 k}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

Sea  $r = \frac{c^2 k}{h^2}$  y comenzando desde  $i$  y  $j$  se tiene que:

$$u_{i,j} = -r u_{i+1,j+1} + (1 + 2r)u_{i,j+1} - r u_{i-1,j+1}$$

Entonces para cada  $j$ :

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & \cdots & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,j} + r u_{0,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{n,j} + r u_{n,j} \end{bmatrix}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

47

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo

Una pared de 0,2m de espesor se encuentra inicialmente a 100°C. Su tasa de transferencia de calor es de  $5 \times 10^{-7} m^2/s$ . Si la temperatura en ambas superficies se baja repentinamente a 20°C y se mantiene constante. ¿Cuál es la variación a través de la pared en intervalos de 440s? (10 intervalos en  $x$  y 10 en  $t$ ).

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad c = 5 \times 10^{-7} m^2/s$$
$$r = \frac{c^2 k}{h^2}, \Delta t = k = 440, \Delta x = h = \frac{0.2}{10} = 0.02$$
$$r = 5 \times 10^{-7} \frac{440}{0.02^2} = 0.55$$

Temperatura inicial: 100°C  $\Rightarrow u(x,0) = 100$

Temperatura en ambas superficies: 20°C  $\Rightarrow u(0,t) = 20$  y  $u(0.2,t) = 20$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

48

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo

Método Implícito:

$$u_{i,j} = -r u_{i+1,j+1} + (1 + 2r)u_{i,j+1} - r u_{i-1,j+1}$$
$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & \cdots & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,j} + r u_{0,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{n-1,j} + r u_{n,j} \end{bmatrix}$$
$$t_1: \begin{bmatrix} 2.1 & -0.55 & & & \\ -0.55 & 2.1 & -0.55 & & \\ & -0.55 & 2.1 & -0.55 & \\ & & & -0.55 & 2.1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 20 * .55 \\ 100 \\ 100 \\ \vdots \\ 100 + 20 * .55 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.3682 \\ 93.5877 \\ 98.1485 \\ \vdots \\ 77.3682 \end{bmatrix}$$
$$t_2: \begin{bmatrix} 2.1 & -0.55 & & & \\ -0.55 & 2.1 & -0.55 & & \\ & -0.55 & 2.1 & -0.55 & \\ & & & -0.55 & 2.1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1,j+2} \\ u_{2,j+2} \\ u_{3,j+2} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.3682 + 20 * .55 \\ 93.5877 \\ 98.1485 \\ \vdots \\ 77.3682 + 20 * .55 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{1,j+2} \\ u_{2,j+2} \\ u_{3,j+2} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.7051 \\ 86.3865 \\ 94.9749 \\ \vdots \\ 64.7051 \end{bmatrix}$$

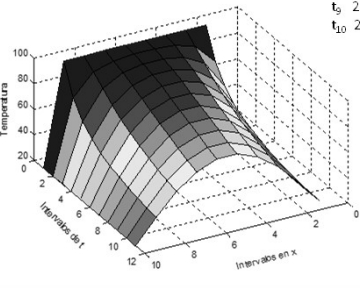
Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

49

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Método implícito:

|                 |    |         |         |         |         |         |         |         |         |
|-----------------|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| t <sub>0</sub>  | 20 | 100     | 100     | 100     | 100     | 100     | 100     | 100     | 20      |
| t <sub>1</sub>  | 20 | 77.3682 | 93.5877 | 98.1485 | 99.3430 | 99.3430 | 98.1485 | 93.5877 | 77.3682 |
| t <sub>2</sub>  | 20 | 64.7051 | 86.3865 | 94.9749 | 97.7930 | 97.7930 | 94.9749 | 86.3865 | 64.7051 |
| t <sub>3</sub>  | 20 | 56.9857 | 79.9359 | 91.1575 | 95.4385 | 95.4385 | 91.1575 | 79.9359 | 56.9857 |
| t <sub>4</sub>  | 20 | 51.8792 | 74.4739 | 87.1378 | 92.4931 | 92.4931 | 87.1378 | 74.4739 | 51.8792 |
| t <sub>5</sub>  | 20 | 48.2435 | 69.8767 | 83.1515 | 89.1783 | 89.1783 | 83.1515 | 69.8767 | 48.2435 |
| t <sub>6</sub>  | 20 | 45.4863 | 65.9594 | 79.3102 | 85.6767 | 85.6767 | 79.3102 | 65.9594 | 45.4863 |
| t <sub>7</sub>  | 20 | 43.2833 | 62.5611 | 75.6600 | 82.1224 | 82.1224 | 75.6600 | 62.5611 | 43.2833 |
| t <sub>8</sub>  | 20 | 41.4482 | 59.5600 | 72.2152 | 78.6069 | 78.6069 | 72.2152 | 59.5600 | 41.4482 |
| t <sub>9</sub>  | 20 | 39.8695 | 56.8687 | 68.9747 | 75.1891 | 75.1891 | 68.9747 | 56.8687 | 39.8695 |
| t <sub>10</sub> | 20 | 38.4779 | 54.4257 | 65.9315 | 71.9041 | 71.9041 | 65.9315 | 54.4257 | 38.4779 |



En el caso de emplear dos dimensiones:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

En el caso de emplear tres dimensiones:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

50

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo

Método Explícito:

Calculamos:

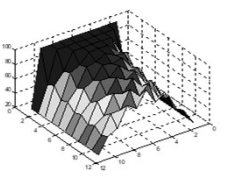
$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$
$$u_{1,1} = -0.1 u_{1,0} + 0.55 (u_{2,0} + u_{0,0}) = 56$$
$$u_{2,1} = -0.1 u_{2,0} + 0.55 (u_{3,0} + u_{1,0}) = 100$$

Y así sucesivamente...

Inestable si:  $r = \frac{c^2 k}{h^2} > \frac{1}{2}$ . En este caso:  $r = 0.55$ .

Para  $i$  intervalo de distancia y  $j$  intervalo de tiempo.

|                 |    |         |          |          |          |          |          |          |          |         |
|-----------------|----|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| t <sub>0</sub>  | 20 | 100     | 100      | 100      | 100      | 100      | 100      | 100      | 100      | 20      |
| t <sub>1</sub>  | 20 | 56.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 56.0000 |
| t <sub>2</sub>  | 20 | 60.4000 | 75.8000  | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 75.8000  | 60.4000 |
| t <sub>3</sub>  | 20 | 46.6500 | 80.6400  | 86.6900  | 100.0000 | 100.0000 | 100.0000 | 86.6900  | 80.6400  | 46.6500 |
| t <sub>4</sub>  | 20 | 50.6870 | 65.2730  | 90.6830  | 92.6795  | 100.0000 | 92.6795  | 90.6830  | 65.2730  | 50.6870 |
| t <sub>5</sub>  | 20 | 41.8314 | 71.2262  | 77.8056  | 95.6077  | 91.9474  | 95.6077  | 77.8056  | 71.2262  | 41.8314 |
| t <sub>6</sub>  | 20 | 45.9913 | 58.6777  | 83.9781  | 83.8034  | 95.9737  | 83.8034  | 83.9781  | 58.6777  | 45.9913 |
| t <sub>7</sub>  | 20 | 38.6736 | 65.6154  | 69.9668  | 90.5932  | 82.5864  | 90.5932  | 69.9668  | 65.6154  | 38.6736 |
| t <sub>8</sub>  | 20 | 43.2211 | 53.1907  | 78.9180  | 74.8449  | 91.3938  | 74.8449  | 78.9180  | 53.1907  | 43.2211 |
| t <sub>9</sub>  | 20 | 35.9328 | 61.8574  | 62.5278  | 86.1870  | 73.1900  | 86.1870  | 62.5278  | 61.8574  | 35.9328 |
| t <sub>10</sub> | 20 | 41.4283 | 47.9676  | 75.1717  | 66.0261  | 87.4867  | 66.0261  | 75.1717  | 47.9676  | 41.4283 |



Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

51

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

Ecuación Elíptica: Ecuación de Laplace

Distribución de temperatura en un plano en estado estable con dos dimensiones espaciales.

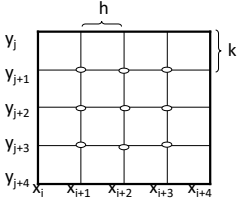
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Aplicable a 3 dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Ecuación de Poisson:  $\nabla^2 u = g(x, y)$

Ecuación de Helmholtz:  $\nabla^2 u + f(x, y)u = g(x, y)$



Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

52

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Ecuación Elíptica: Ecuación de Laplace

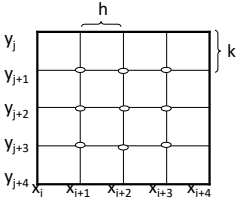
Distribución de temperatura en un plano en estado estable con dos dimensiones espaciales.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si  $h = k$ :

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$
$$\frac{u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$



Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

53

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Ejemplo

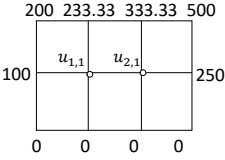
Determinar la distribución de temperatura en un plano, sujeto a la siguientes temperaturas en sus bordes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq y \leq 2$$
$$u(0,y) = 100y \quad u(3,y) = 250y$$
$$u(x,0) = 0 \quad u(x,2) = 200 + \frac{100}{3}x^2$$

Entonces:  $h = k = 1$

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$
$$u_{2,1} + u_{0,1} + u_{2,2} + u_{2,0} - 4u_{2,1} = 0$$
$$u_{2,1} + 100 + 233.33 + 0 - 4u_{2,1} = 0$$
$$-4u_{2,1} + u_{2,1} = -333.33$$
$$u_{3,1} + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{2,0} - 4u_{2,1} = 0$$
$$250 + u_{1,1} + 333.33 + 0 - 4u_{2,1} = 0$$
$$u_{1,1} - 4u_{2,1} = -583.33$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -333.33 \\ -583.33 \end{bmatrix}$$
$$u_{1,1} = 127.78 \quad y \quad u_{2,1} = 177.78$$



Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

54

Unidad 7 – Ecuaciones Diferenciales

### Comandos Matlab

**Pdepe** EDP parabólicas y elípticas

`sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan,options,p1,p2,...)`

- **m** Simetría del problema. m puede ser: 0=plano, 1=cilindro, o 2=esfera.
- **pdefun** Función del EDP.
- **icfun** Función para las condiciones iniciales.
- **bcfun** Función para las condiciones de frontera.
- **xmesh** Vector [x0, x1, ..., xn] con los puntos en los cuales son requeridos los valores.
- **tspan** Vector [t0, t1, ..., tf] con los tiempos requeridos
- **options** ver odeset.
- **p1,p2,...** Parameters opcionales para pdefun, icfun y bcfun

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

55